添削問題の準備（理工学部　２回目）

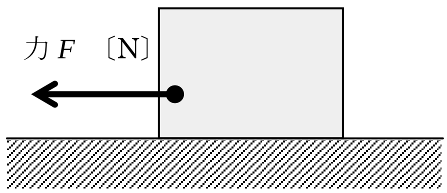
摂南大学理工学部

添削問題の準備には基本事項と例題が用意されています。添削問題に取り組む前に基本事項を確認し，例題に取り組んでください。途中であきらめないで，がんばってください。

基本事項

運動方程式を立てることは，運動を解く最終段階である。この運動方程式のうち運動に変化がないものをつりあいの式という。つまり，つりあいの式は運動方程式のひとつの形である。

①　運動方程式

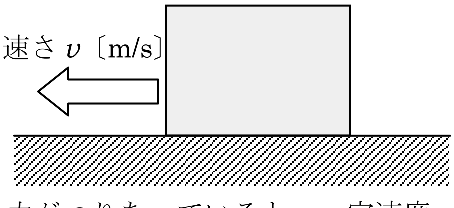


力を F〔N〕，物体の質量を m〔kg〕，運動の方向や速さを変化させる加速度を a〔m/s²〕として，

$$ma = F \qquad (1)$$

が成り立つ。この意味は，「物体に力を加えるとその質量に応じて加速（または減速）する」といった日常で体験している現象を示している。また，つりあいの式（静止している場合）では運動の方向や速さが変化しないので左辺の a は 0 となる。

②　等速直線運動



力がつりあっていると，一定速度で同じ方向に動き続ける。

すべての力がつりあっている場合（(1)式の $F=0$ の場合），加速度 a は 0 となる。つまり，物体の運動は方向も変わらず，速さも変わらないこととなる。これは [1]静止をしているか，もしくは[2]速さが一定のまま同じ方向に運動する，等速直線運動をしているということである。速さ v〔m/s〕の等速直線運動では時刻 $t=0$ での位置を x_0〔m〕とすると時刻 t〔s〕での位置は

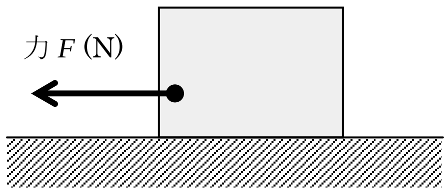
$$x = vt + x_0 \qquad (2)$$

で書かれる。ここでの重要ポイントは，

(力がつりあっている)≠(必ず動いていない)

ということである。

③　等加速度直線運動



運動の方向(動いている方向)に一定の力 F が働いているとき，その運動は等加速度直線運動となる。このときの加速度の大きさは，(1)式より， $a=\dfrac{F}{m}$ となる。等加速度直線運動では時刻 $t=0$〔s〕での速さを υ_0〔m/s〕，位置を x_0〔m〕として，以下の関係が知られている。

$$x=\frac{1}{2}at^2+\upsilon_0 t+x_0, \qquad (3)$$

$$v=at+\upsilon_0, \qquad (4)$$

$$\upsilon^2-\upsilon_0^2=2a(x-x_0) \qquad (5)$$

ここでの最重要ポイントは，考えている現象が等加速度直線運動であるかどうかの判断である。

④　力学的エネルギー保存の法則

ある力 F〔N〕で力の方向に物体を s〔m〕移動させたとき，物理では Fs〔J〕の仕事をしたと言う。この仕事を他の物体にする能力を持っているとき，その物体はエネルギーを持っていると言う。

例えば，速度 υ〔m/s〕で運動している物体が静止している物体に衝突すると，静止していた物体は動く。つまり，運動している物体はエネルギーを持っている。このエネルギーは運動エネルギーと呼ばれ，運動している物体の質量を m〔kg〕として $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$〔J〕と書かれる。

また，高いところにある物体も同じようにエネルギーを持っている。このエネルギーは位置エネルギーと呼ばれる。位置エネルギーは基準点(各自で決める)からの高さが h〔m〕，質量 m〔kg〕のとき mgh〔J〕と書かれる。

この運動エネルギーと位置エネルギーをあわせたものを力学的エネルギーといい，重力だけが働いている運動では，力学的エネルギーは一定である(保存される)。

〔例題１〕**運動方程式**

次の場合において運動方程式をたて，加速度を求めよ。

(1) 図 a のように，なめらかな床面上におかれた質量 3 kg の物体に 9 N の力を加えた場合。

(2) 図 b のように，質量 3 kg の物体Ａと質量 2 kg の物体Ｂが接触して，なめらかな床面上におかれている。物体Ａに 10 N の力を加えたところ，物体Ａと物体Ｂは離れずに動いた。

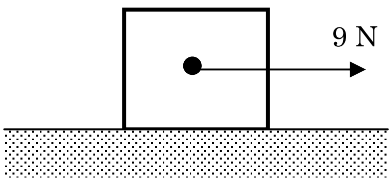


図 a

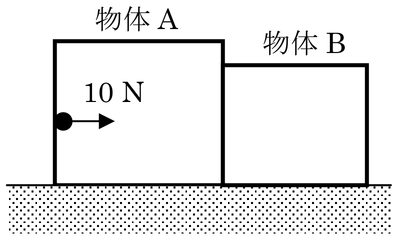
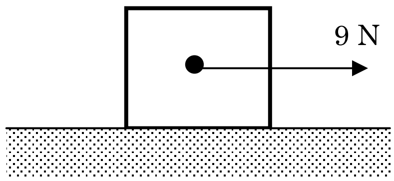


図 b

（解説と解答）

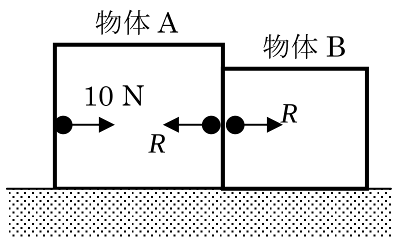
（１） 9 N の力により物体が動く方向は右方向なので，左右に加わる力の合計（合力）を用いて運動方程式（(1)式）を解けばよい。



(1)式: $ma = F$ から

$3a = 9$ 　したがって，　$\underline{a = 3 \text{ m/s}^2}$

（２）物体Ａと物体Ｂは接触しているので，互いに垂直抗力が同じ大きさではたらく。これらを考慮して，物体Ａ，物体Ｂに対して別々に運動方程式を立てる。



（物体Ａ）右向きにはたらく力の合力は

$F = 10 - R$ なので，運動方程式は

$3a = 10 - R$ 　(a)

（物体Ｂ）物体Ａの場合と同様に考えて

$R = 2a$ 　(b)

となる。(b)式を(a)式に代入して，a について解くと，加速度 a は

$\underline{a = 2 \text{ m/s}^2}$

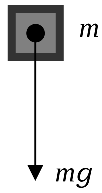
を得る。ちなみに，これを (b)式 へ代入すると，R が得られ，

$\underline{R = 4 \text{ N}}$ となる。

〔例題２〕**自由落下**

地球上では物体は鉛直下向きに落下する。質量 m〔kg〕の物体が 5 秒間で落下する距離は何 m か。ただし，初速度は 0 とし，空気抵抗は無視する。また，重力加速度 g は 9.8 m/s^2 とする。

（解説と解答）



地球上にあるすべての物体には重力 mg〔N〕がはたらく。
今の場合，物体には鉛直下向きに重力以外ははたらいていない。
したがって，鉛直下向きを正として力の合力 F を求めると，
mg となる。この合力 F を運動方程式 $ma = F$ へ代入すると

$$ma = mg \quad \text{となり，}$$

$$a = g$$

を得る。
ここで，g は一定値(9.8 m/s^2)なので，この自由落下は等加速度直線運動である。
自由落下では初速度 v_0 が 0 であるので，(4)式から

$$v = gt$$

を得る。これは t 秒後の速さを表しており，5 秒後には

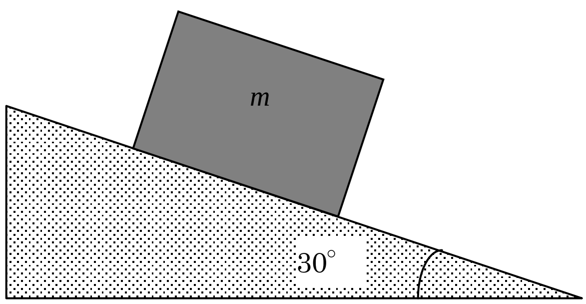
$v = 9.8 \times 5$
$= 49$ m/s　←　時速 176 km くらいの速さ

になる。さらに，5 秒後の位置は式(3)において $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ を代入して得られ，

$$x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 \qquad \therefore \quad \underline{x = 122.5\ \text{m}} \qquad \text{となる。}$$

〔例題３〕**斜面落下**

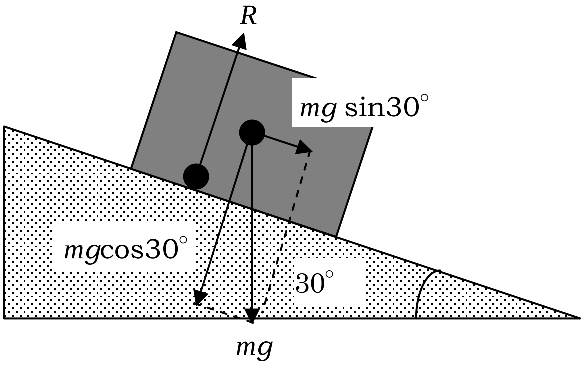
なめらかな斜面上におかれた物体は斜面に沿って落下する。質量 m〔kg〕の物体が角度 30° の斜面に沿って落下する距離は 5 秒間で何 m か。ただし，初速度は 0 とし，空気抵抗は無視する。また，重力加速度 g は 9.8 m/s^2 とする。



（解説と解答）

斜面上の物体は，重力 mg〔N〕と斜面からの垂直抗力 R〔N〕をうける。これらの力を図中に記入する。また，物体は斜面に沿って動くので，斜面に沿った方向とこれに垂直な方向を軸として取り，この方向にすべての力を分解する。

次に，斜面に沿った方向，斜面に垂直な方向について別々に運動方程式をたて，これらを解けばよい。



（斜面に垂直な方向）

斜面に垂直な方向の力は垂直抗力 R と重力の斜面に垂直成分 $mg\cos 30^\circ$ だけである。ここで，物体は斜面に埋もれたり，斜面から離れたりしないことから，斜面に垂直方向の加速度は 0 である。２つの力（R と $mg\cos 30^\circ$）は互いに逆向きであることを考慮すると，(1)式の運動方程式は

$$0 = R - mg\cos 30^\circ$$

となり，つりあいの式となる。この関係式から，垂直抗力 R が求まり，$R = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ が得られる。

（斜面に沿った方向）

斜面に沿った力は斜面下向きに $mg\sin 30^\circ$ だけなので，斜面方向の力の合力 F は斜面下向きを正にとると $F = mg\sin 30^\circ$ である。したがって運動方程式は(1)式より，

$$ma = mg\sin 30^\circ$$

となる。これを a について解くと，

$$a = \frac{1}{2}g$$

となる。ここで，g は一定値(9.8 m/s^2)なので，この斜面落下は自由落下の場合に比べて，半分の加速度で落下する等加速度直線運動である。

したがって，初速度 v_0 が 0 であるので，(4)式から

$$v = \frac{1}{2}gt$$

を得る。これは t 秒後の速さを表しており，5 秒後には

$v = 9.8 \times 5 /2$

$= 24.5$ m/s　←　時速 88 km くらいの速さ

になる。さらに，5 秒後の位置は式(3)において $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ を代入して得られ，

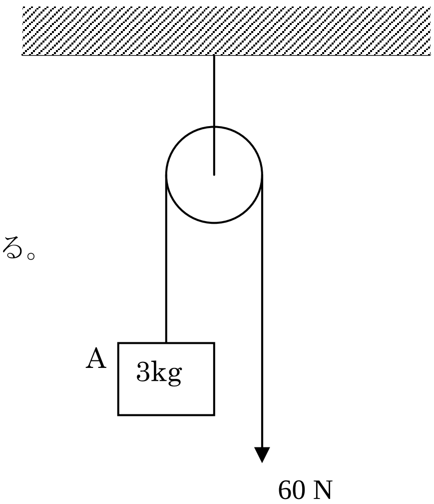
$$x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}g)t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} 9.8 \times 5^2$$

$$\therefore \quad x = 61.25 \text{ m}$$

となる。

〔例題４〕**滑車を用いた物体の運動**

右図のように天井に固定された定滑車に糸をかけ，糸の一端に質量 3 kg の物体Ａをつるし，他端を力 60 N で鉛直下向きに引いた。物体Ａが 2 秒間に上がる距離を求めよ。ただし，空気抵抗は無視する。また，重力加速度 g は 9.8 m/s² とする。



（解説と解答）

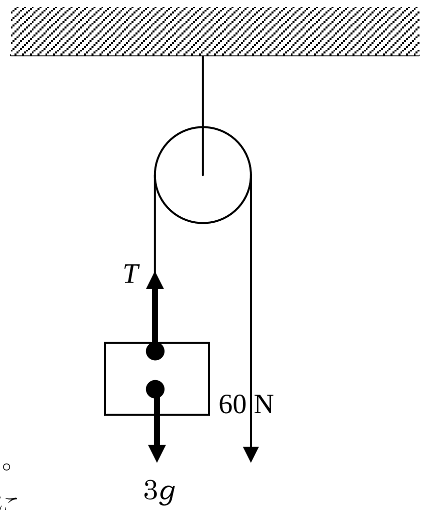
糸が物体Ａを引く力 T〔N〕は図から 60 N と等しい。
また，物体Ａには重力 $3g$〔N〕がはたらく。
それゆえ，物体Ａにはたらく力は鉛直上向きに T〔N〕と鉛直下向きに $3g$〔N〕となる。
したがって，鉛直方向の合力は上向きを正として，

$F = T - 3g = 60 - 3g$

となるので，運動方程式は

$3a = 60 - 3g$

となる。$g = 9.8$ m/s² を代入して，$a = 10.2$ m/s² となる。
また，物体Ａの運動は等加速度直線運動なので，2 秒間に



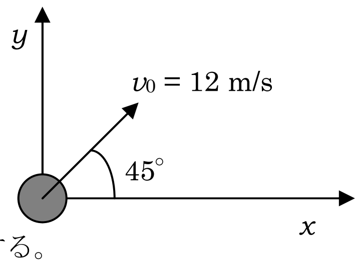
移動する距離 x は，(3)式から

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 10.2 \times 2^2$$

$$= 20.4 \quad \mathrm{m}$$

となる。

〔例題５〕**斜方投射**



右図のように，質量 5kg の砲丸を地表面と
45° の角度で投げた。0.5 秒後に砲丸が到達する
位置を求めよ。ただし，初速度は $v_0 = 12$ m/s とし，
空気抵抗は無視する。また，重力加速度 g は 9.8 m/s² とする。
なお，$\sqrt{2}$ は 1.4 とする。

（解説と解答）

砲丸の運動は水平方向と高さ方向（鉛直方向）との２つの方向に関係するので，水平方向と鉛直方向の運動方程式を別々にたてる。

（水平方向）

砲丸は水平方向には飛ぶ（動く）が，水平方向には全く力は加わっていない。したがって，砲丸は水平方向に等速直線運動を行う。すなわち，水平方向の速さ v_x は

常に，　$v_x = v_0 \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$ となる。

等速直線運動を行う砲丸は (2)式に従うので，

$$x = v_x t = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12 \times 0.5$$

$$= 4.2 \quad \mathrm{m}$$ となる。

（鉛直方向）

斜方投射された砲丸にかかる力は唯一重力だけである。したがって，鉛直方向の力の合力は上向きを正にとると $F = -mg$ となり，運動方程式（$ma = F$）は簡単に

$$5a = -5g$$

$$\therefore \quad a = -g$$ と加速度は一定となる。

これは鉛直方向の運動は等加速度直線運動であることを示しているので，(4)式から移

動距離が求まる。鉛直方向の初速度は$v_y = v_0 \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} v_0$になることに注意して，

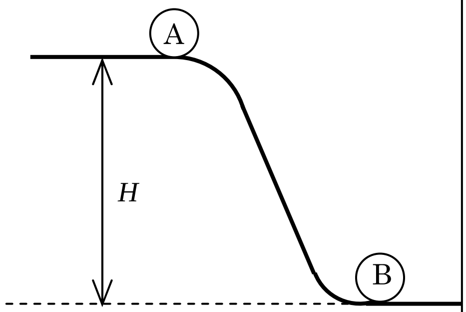
$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 12 \sin 45° \times 0.5 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.5^2$$
$$= 3\sqrt{2} - 1.225 = 2.975$$

$\therefore \quad y = 2.975 \quad \mathrm{m}$

したがって，砲丸が 0.5 秒後にある位置は $\underline{x = 4.2\ \mathrm{m},\ y = 2.975\ \mathrm{m}}$ である。

〔例題６〕**エネルギー保存**

図のようなまさつのない高さ H〔m〕の坂道がある。この A 点で質量 m〔kg〕の物体を静かにはなしたところ，物体は斜面に沿って移動し，B 点で速度 v〔m/s〕となった。重力加速度を g〔m/s²〕として速度 v〔m/s〕を求めよ。



（解説と解答）

B 点を位置エネルギーの基準点とすると，A 点での位置エネルギーはmgH〔J〕と書ける。ここでは物体は静止しているので運動エネルギーは 0 である。一方，基準点である B 点での位置エネルギーは 0 であるが，ここでは速度 v〔m/s〕で運動しているので運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}mv^2$〔J〕である。よって A 点および B 点での力学的エネルギーはそれぞれ

A 点：　mgH　①

B 点：　$\dfrac{1}{2}mv^2$　②

となる。働いている力は重力だけなので力学的エネルギー保存則が成り立つ。よって①と②が等しいことから，

$$v = \sqrt{2gH}$$

が求まる。