5　指数と対数

指数の定義

a を正の数，n を自然数とするとき，**累乗** $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}$ として定義されます．

指数関数 $y = a^x$ は次の**指数法則**という性質を満たし，グラフが連続になるように累乗 a^n を実数全体に拡張した関数です．

i) $a^p \times a^q = a^{p+q}$　　ii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

iii) $(a^p)^q = a^{pq}$　　iv) $(ab)^p = a^p b^p$

注意．正の整数 m, n に対して $a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$．

例題 次の値を求めなさい．

(1)　$\sqrt{8} \times \sqrt{2}$　　(2)　$(\sqrt{3})^3 \div 9^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

(解)　(1) 与式 $= 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4.$

(2) 与式 $= 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}-3-\frac{1}{2}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

対数の定義 正数 A を与えると $a^r = A$ となる実数 r が必ず 1 つあります．この r を

a を**底**とする A の**対数** といい $\log_a A$

と書きます．

$$a^r \ = \ A \quad \Longleftrightarrow \quad r \ = \ \log_a A$$

例えば $a^1 = a$, $a^0 = 1$ だから $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$ となります．

対数の公式 $A > 0$, $B > 0$, $b > 0$ とすると

i) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$　　ii) $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

iii) $\log_a A^q = q \log_a A$　　iv) $\log_b A = \dfrac{\log_a A}{\log_a b}$

例題 次の値を求めなさい．

(1) $\log_8 4$　　(2) $\log_9 \sqrt{27}$

(解)　(1) $p = \log_8\ 4$ とおくと対数の決め方から $8^p = 4$．$8 = 2^3$, $4 = 2^2$ より $(2^3)^p = 2^2$, $2^{3p} = 2^2$．指数をくらべて $\underline{p = \dfrac{2}{3}}$.

(2) $p = \log_9\ \sqrt{27}$ とおくと $9^p = \sqrt{27}$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ より $3^{2p} = 3^{\frac{3}{2}}$. これから $\underline{p = \dfrac{3}{4}}$.