

2 2次方程式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, b, c$ は定数) の解は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ただし判別式 $D = b^2 - 4ac < 0$ の時は実数解なし

2次方程式の解き方

(1) 因数分解による方法

例. i) $x^2 - 2x + 3 = 0$, ii) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

解. i) 左辺を因数分解して $(x - 3)(x + 1) = 0$ となるので $x = 3, -1$.

ii) 左辺を因数分解して $(2x + 1)(x + 1) = 0$ となるので $x = -1, -\frac{1}{2}$.

(2) 平方完成による方法

例. $x^2 + 2x - 9 = 0$

解. 左辺を平方完成して $(x + 1)^2 - 10 = 0$ となるので $(x + 1)^2 = 10$, 両辺の平方根をとって $x + 1 = \pm\sqrt{10}$, すなわち $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

(3) 解の公式による方法

(2) の方程式を解の公式に当てはめると

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

注意. 根号の中が負になるときは方程式の実数解はありません.

例. $2x^2 + 2x + 3 = 0$

解. 判別式 $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 < 0$ より解なし.

解の判別

解の公式の根号の中の式 $D = b^2 - 4ac$ を**判別式**といいます

i) $D < 0$ のとき, 解なし

ii) $D > 0$ のとき, 相異なる2実数が解

iii) $D = 0$ のとき, 1つの解(重解)

例題. k を定数とするとき, 2次方程式 $x^2 + 2(k + 1)x + k^2 + 2 = 0$ の実数解の個数を調べなさい.

解. 判別式は

$$D = \{2(k + 1)\}^2 - 4(k^2 + 2) = 4(2k - 1).$$

従って $k > \frac{1}{2}$ のとき 2 個, $k = \frac{1}{2}$ のとき 1 個, $k < \frac{1}{2}$ のとき 0 個.