博士の愛した数式-その3

オイラーの公式について
(博士のお気に入り式: $e^{i\pi}+1=0$)

オイラーの公式 ($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$: ただし i は虚数単位で、θ は実数)

オイラーの公式は e^x **のマクローリン展開で示せる:** $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

この展開式で $x=i\theta$ とすると (実部と虚部に分けて)

$$e^{i\theta}=1+\frac{1}{1!}(i\theta)+\frac{1}{2!}(i\theta)^2+\frac{1}{3!}(i\theta)^3+\cdots=1-\frac{1}{2!}\theta^2+\cdots+i(\frac{1}{1!}\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots)$$
$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

として**オイラーの公式**が示された。

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ で $\theta=\pi$ とすると $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i0=-1$ より

$$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$$