博士の愛した数式-その2

マクローリンの展開公式について

($f(x)=e^x,\ \sin x,\ \cos x$ への応用)

マクローリンの展開公式 ($f(x)$ は $x=0$ を含むある範囲の x で何回でも微分可能とする)

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例1　$f(x)=e^x : f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, \cdots, f^{(n)}(x)=e^x$

$$e^x=e^0+\frac{e^0}{1!}x+\frac{e^0}{2!}x^2+\cdots+\frac{e^0}{n!}x^n+\cdots=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

例2　$f(x)=\sin x : f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x, f^{(4)}(x)=\sin x, \cdots$

$$\sin x=\sin 0+\frac{\cos 0}{1!}x+\frac{-\sin 0}{2!}x^2+\frac{-\cos 0}{3!}x^3+\cdots=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

例3　$f(x)=\cos x : f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x, f'''(x)=\sin x, f^{(4)}(x)=\cos x, \cdots$

$$\cos x=\cos 0+\frac{-\sin 0}{1!}x+\frac{-\cos 0}{2!}x^2+\frac{\sin 0}{3!}x^3+\cdots=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$