博士の愛した数式-その1

指数関数e^xと対数関数$\log_e x$について

($y=e^x$と$x=\log_e y$とは同値)

自然対数の底eの定義 : $e=\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$

$f(x)$の導関数$(f(x))'=f'(x)$の定義 : $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$(\log_e x)'$の計算

$$(\log_e x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+\frac{h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x}{hx}\log_e(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_e(1+k)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$ (途中で$k=\dfrac{h}{x}$とおいた)

$(e^x)'$の計算

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{k}{\log_e(1+k)}$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{\log_e(1+k)^{\frac{1}{k}}}=e^x\frac{1}{\log_e e}=e^x$$ (途中で$k=e^h-1$とおいた)